**恒定秩映射** 2021年1月6日10点17分

线性映射的关键线性代数性质是其秩.实际上,如定理B.20所示,如果我们可以自由地为域和共域选择基,则秩是区分不同线性图的唯一属性.

假设和是有或没有边界的光滑流形.给定平滑映射和点;我们将处的的**秩**定义为线性映射的秩;它是任何平滑图中F的雅可比矩阵的秩,或的维度.如果F在每个点上具有相同的秩,则说它具有**恒定秩**,则写作.

因为线性映射的秩永远不会高于其域或其共域的维度(练习B.22),所以每个点上的秩都由的最小值限制.如果的秩等于该上限,则说在处具有**满秩**，如果F在所有地方均具有满秩,则我们说F具有**满秩**.

最重要的恒定秩映射是满秩.平滑映射被称为**平滑浸没[smooth submersion]**仅当它的微分在每个点上都是满射(或等效,仅当).如果它的微分在每个点上都是单射的,则称为**平滑浸入[smooth immersion]**(等效于).

命题4.1 假设是平滑映射且.如果是满射,则具有邻域,使得是浸没.如果是单射,则具有邻域,使得是进入.

局部微分同构 2021年1月6日11点39分

如果和是有或没有边界的光滑流形,则映射被称为**局部微分同构**仅当对于每个点都具有邻域,使得在中开放且是一个微分同构.下一个定理是局部微分同构最重要性质的关键.

定理4.5(流形逆函数定理) 假设和是光滑流形,而是平滑映射.如果是使可逆的点,则存在的连通邻域和的使得是微分同构.

命题4.6(局部差分态的基本性质)

局部微分同构的每个组成都是局部微分同构.

光滑流形之间局部微分同构的有限乘积都是局部微分同构.

每个局部微同构都是局部同胚和开映射.

将局部微分同构约束到具有或不具有边界的开放子流形是局部微分同构.

每个微分同构都是局部微分同构.

每个双射局部微分同构都是一个微分同构.

有界或无界的平滑流形之间的映射是一个局部微分同构当且仅当对于域中每一个点的领域,总是存在局部微分同构的坐标表达.

命题4.8 假设和是光滑流形(无边界),并且是一个映射.则

F是局部微分同构当且仅当它同时是平滑浸入和平滑浸没.

如果并且F只要是平滑浸入和平滑浸没之一,则F就是一个微分同构.

秩定理

定理4.12(等级定理) 假设和分别是维度为和的光滑流形,并且是具有恒定秩的平滑映射.对于每个,存在以为中心的光滑图和以为中心的,使得,其中具有以下形式的坐标表示(**证明过程比较复杂,需要理解**)

特别是,如果F是平滑浸没,则变为

如果F是平滑浸入,则为

推论4.13 令和为光滑流形,令是平滑映射,并且假定已连通.那么以下是等效的:

对于每个,存在包含和的平滑图,其中的坐标表示是线性的.

F具有恒定秩.

定理4.14(全局秩定理) 令和为光滑流形,并假设是常数秩的平滑映射.

如果是满射,则它是平滑浸没.

如果是单射,则它是平滑浸入.

如果是双射,则它是微分同构.

具有边界的流形的秩定理

定理4.15(具有边界的流形的局部浸入定理) 假设是具有边界的光滑流形,是光滑流形,而是平滑浸入.对于任意,对于存在一个以p为中心的平滑有界坐标图,对于N,存在一个以为中心的平滑坐标图,其中,并且具有坐标表达

嵌入 2021年1月6日16点55分

一种特殊的浸入方式尤其重要.如果和是有边界或无边界的光滑流形,则将**平滑嵌入[smooth embedding]**到中就是平滑浸入同时也是拓扑嵌入,即在子空间拓扑中的同胚性在其图像上.平滑嵌入是既包含拓扑嵌入又包含平滑浸入的映射，而不仅仅是碰巧是平滑的拓扑嵌入.

引理4.21(狄里克雷的近似定理) 给定˛和任意正整数,存在整数,使得.(**证明过程需要看懂**)

命题4.22 假设和是有或没有边界的光滑流形,且是单射平滑浸入.如果满足以下任一条件,则F为平滑嵌入.

F是一个开或闭映射.

F是一个适当[proper]映射.

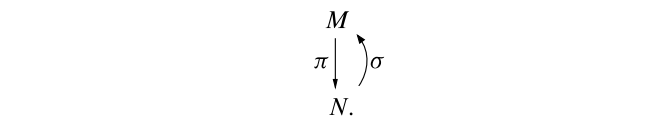
M是紧的.

M具有空边界且.

定理4.25(局部嵌入定理) 假设和是有或没有边界的光滑流形,且是平滑映射.则F是一个平滑浸入当且仅当M中每一个点具有一个领域使得是一个平滑嵌入.

浸没 2021年1月6日17点49分

秩定理最重要的应用之一是极大地扩展了我们对沉浸特性的理解.如果是任何连续映射,的一扇[a section]是的连续右逆,即连续映射使得:

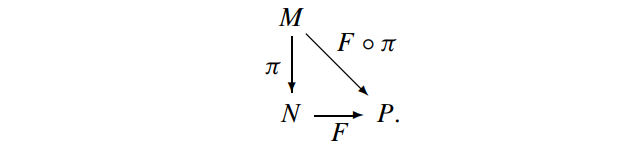


的**局部扇[local section]**是连续映射在某个开放子集上定义,并且满足类似关系.平滑浸没的许多重要特性来自以下事实:它们吸收了大量的平滑局部截面.

定理4.26(局部截面定理) 假设和是光滑流形,并且是平滑映射.则是一个平滑浸没当且仅当对于的每一个点都在的平滑局部扇的图像中.

命题4.28(平滑浸没的性质) 令和为光滑流形,并假设是平滑浸没.则是一个开放映射,如果它是满射,则它是商映射.

定理4.29(满射光滑浸没的特性) 假设和是光滑流形,且是一个满射平滑浸没.对于任何有边界或无边界的光滑流形,映射是光滑的当且仅当是光滑的:



定理4.30(平稳地传递到商) 假设和是光滑流形,且是一个满射平滑浸没.如果是有或没有边界的光滑流形并且是一个在的平滑映射，则存在唯一的平滑图FzW N！ P使得FzıD F：